# 期中考试参考解答

2022 年 4 月 17 日

## 一、正态样本

**自然参数表示**, 4’ 样本密度函数为

$$f(x|a,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i\leqslant n}(x_i-a)^2\}. \tag{1'}$$

自然参数表示为

$$f(x|a,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i\leqslant n}x_i^2+\frac{a}{\sigma^2}\sum_{i\leqslant n}x_i\}\mathrm{e}^{na^2/\sigma^2}. \tag{1'}$$

根据因式分解定理和指数族的性质 $(\sum X_i, \sum X_i^2)$ 即为充分完备统计量。与之一一对应均可。自然参数为 $\theta=(\theta_1,\theta_2)=(-1/(2\sigma^2), a/\sigma^2)$, 自然参数空间为 $\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^+$. 注意到 $a>0$. (2’)

**极大似然估计**, 6’ 先求参数 $(a,\sigma^2)$ 的 MLE. 对数似然函数为

$$l(a,\sigma^2|x) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i\leqslant n}(x_i-a)^2. \tag{1'}$$

似然函数微分，极大值点处导数为零，因而

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial\sigma^2} &= -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i\leqslant n}(x_i-a)^2=0,\\ \frac{\partial l}{\partial a} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i\leqslant n}(x_i-a)=0.\end{aligned} \tag{1'}$$

解得

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \overline{X},\\ \hat{\sigma^2} &= \sum_{i\leqslant n}(X_i-\overline{X})^2/n.\end{aligned} \tag{1'}$$

因此，根据 MLE 对重参数化的不变性可知

$$\hat{\theta} = \frac{\sqrt{n\sum_{i\leqslant n}(X_i-\overline{X})^2}}{\sum_{i\leqslant n}X_i}. \tag{1'}$$

另一方面

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i\leqslant n} X_i}{n} \to a, \quad \text{a.s.}$$
$$S_n^2 = \frac{\sum_{i\leqslant n}(X_i - \overline{X})^2}{n} \to \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \sigma^2, \quad \text{a.s.} \tag{1'}$$

因此 $\hat{\theta} = \sqrt{S_n^2}/\overline{X} \to \sigma/a$, a.s., 即为（强）相合估计。(1')

## 二、多项分布

**矩估计量和极大似然估计**, 6' $X$ 的总体一阶矩为

$$\mathbb{E}[X] = 3 - 5\theta. \tag{1'}$$

因此 $\theta$ 的矩估计为

$$\hat{\theta}_M = \frac{3 - \overline{X}}{5}. \tag{2'}$$

记 $N_k = \sum_{i\leqslant n} \mathbb{1}_{X_i=k}$, $N_k$ 为统计量。似然函数可以写成

$$L(\theta|x) = \frac{n!}{n_0!n_1!n_2!n_3!}(\theta/2)^{n_0}(\theta)^{n_1}(3\theta/2)^{n_2}(1-3\theta)^{n_3}. \tag{1'}$$

对数似然函数

$$l(\theta|x) = (n - n_3)\log\theta + n_3\log(1-3\theta) + c(x).$$

似然函数导数为零,

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{n - n_3}{\theta} - \frac{3n_3}{1-3\theta} = 0. \tag{1'}$$

解方程得到

$$\hat{\theta}_L = \frac{n - N_3}{3n}. \tag{1'}$$

**无偏性**, 5' 估计的期望为

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_M] = \frac{3 - (3 - 5\theta)}{5} = \theta, \tag{2'}$$
$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_L] = \frac{n - n(1-3\theta)}{3n} = \theta. \tag{3'}$$

两者都是无偏的。如果矩估计采用其他版本则是情况而定。

**估计的效率**, 4’ 参数的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$ 为充分统计量 $N_3$ 的函数，并且为 $\theta$ 的无偏估计，因此为 UMVUE, 因而 $\hat{\theta}_M$ 的方差不会更小。(1’) 实际上

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\hat{\theta}_M) = \frac{1}{25n}\operatorname{var}(X_1) = \frac{1}{25n}\left(9-20\theta-(3-5\theta)^2\right) = \frac{1}{25n}\left(10\theta-25\theta^2\right) = \frac{\theta(2-5\theta)}{5n},\\ \operatorname{var}(\hat{\theta}_L) = \frac{\theta(1-3\theta)}{3n} < \operatorname{var}(\hat{\theta}_M).\end{aligned} \tag{1'}$$

因此认为 $\hat{\theta}_L$ 更加有效。(1’)

## 三、混合均匀分布

**充分性与完备性**, 10’ 注意到单个样本的密度函数为

$$f(x|\theta) = \theta\mathbb{1}_{x\in(0,1)} + (1-\theta)\mathbb{1}_{x\in[1,2)} = \theta^{\mathbb{1}_{x\in(0,1)}}(1-\theta)^{1-\mathbb{1}_{x\in(0,1)}}.$$

因此样本联合分布为

$$f(x|\theta) = (1-\theta)^n \exp\{\log\frac{\theta}{1-\theta}\sum_{i\leqslant n}\mathbb{1}_{x_i\in(0,1)}\}. \tag{4'}$$

自然参数空间 $\mathbb{R}$ 有内点，根据指数族的性质 $T = \sum_{i\leqslant n}\mathbb{1}_{X_i\in(0,1)}$ 为充分完备统计量。(3’) 另外，

$$\frac{f(x|\theta)}{f(y|\theta)} = C_{x,y} \Leftrightarrow T(x) = T(y),$$

根据极小充分性判别定理，$T(X)$ 也是极小充分统计量。(3’)

**矩估计和极大似然估计**, 10’ 注意到

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{2}(1-\theta) = \frac{3}{2} - \theta. \tag{2'}$$

可知，$\hat{\theta}_M = \frac{3}{2} - \overline{X}$. (3’) 对数似然函数求导

$$\frac{\partial l}{\partial\theta} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \hat{\theta}_L = \frac{\sum_{i\leqslant n}\mathbb{1}_{X_i\in(0,1)}}{n}. \tag{5'}$$

**估计的方差**, 10’ 显然 $\hat{\theta}_L$ 为充分完备统计量 $T$ 的函数，且为 $\theta$ 的无偏估计，根据 Lehmann-Scheffe 定理，其为 UMVUE(5’). 另一方面，

$$\operatorname{var}(\hat{\theta}_M) = \frac{1}{n}\left(\frac{7}{3} - 2\theta - (\frac{3}{2}-\theta)^2\right) = \frac{1}{n}(\frac{1}{12}+\theta-\theta^2) > \operatorname{var}(\hat{\theta}_L) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}, \forall\theta\in(0,1). \tag{3'}$$

因此 $\hat{\theta}_M$ 不为 UMVUE. (2’)

## 四、Bernoulli 试验

**自然参数表示**, 8’ 如果 $X_1,\ldots,X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$ ，则联合质量函数为

$$f(x_1,\dots,x_n|p)=\binom{n}{\sum x_i}p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}.$$

指数族的自然参数表示为

$$f(x_1,\dots x_n|p)=(1-p)^n\exp\left\{\log\frac{p}{1-p}\sum x_i\right\}\binom{n}{\sum x_i}=c(\theta)\exp\left\{\theta T(x)\right\}h(x). \tag{3}$$

其中 $h(x)=\binom{n}{\sum x_i}$, $c(\theta)=(1+\mathrm{e}^{\theta})^{-n}$. 自然参数为 $\theta=\log\left(p/(1-p)\right)$ (1′), 自然参数空间为 $\Theta=\mathbb{R}$ (1′).

**不存在无偏估计**, 6' 根据指数族的性质，$T=\sum_{i\leqslant n}X_i\sim\mathsf{Binomial}(n,p)$ 为 $\theta$ 的充分统计量。对于一个统计量 $\varphi(X)$，假设其为 $\theta$ 的无偏估计，则 $g(T)=\mathbb{E}[\varphi(X)|T]$ 也为 $\theta$ 的无偏估计，我们证明后者不存在。如果不然，$g(T)$ 为 $\theta$ 的无偏估计，那么

$$\mathbb{E}[g(T)]=\sum_{t\leqslant n}g(t)\binom{n}{t}p^t(1-p)^{n-t}=\log\frac{p}{1-p},\quad\forall p\in(0,1). \tag{4'}$$

然而上式左侧为 $p$ 的连续函数，且在 $0,1$ 两点极限存在，因而在 $(0,1)$ 上有界（多项式的性质），右侧当 $p\to 0',1'$ 时无界，因而上述等式不可能对所有 $p\in(0,1)$ 成立，矛盾。 (2′)

Remark. 此题说明方法较多，意思对即可。少数同学有逻辑硬伤，扣一分。没有做出来的同学酌情给分。

**渐进正态性**, 7' 对数似然函数求导

$$\frac{\partial l}{\partial p}=\sum x_i\frac{1}{p}-(n-\sum x_i)\frac{1}{1-p}=0. \tag{1'}$$

解方程得到 $p$ 的极大似然估计

$$\hat{p}=\overline{X}. \tag{1'}$$

根据 MLE 对重参数化的不变性，得到 $\theta$ 的极大似然估计

$$\hat{\theta}=\log\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}. \tag{1'}$$

根据 MLE 的渐进正态性，或者中心极限定理可知

$$\sqrt{n}(\hat{p}-p)\to\mathsf{N}(0,p(1-p))\text{ in distribution.} \tag{2'}$$

对于 $g(x)=\log(x/(1-x))$, 简单计算得到

$$g'(p)=\frac{1}{p(1-p)}.$$

根据 Delta 定理 (1′)，$\hat{\theta}$ 满足

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)\to \mathsf{N}(0,\frac{1}{p(1-p)}) \text{ in distribution.} \tag{1'}$$

几个问题：

- 如果没有 $\sqrt{n}$ 则酌情扣分。这种情况下依分布收敛到单点 Dirac 测度。
- 最终分布里不能带有 $n$，除非你写的是“当 $n$ 足够大时，分布近似为...”
- 直接用 MLE 的渐进正态性是可以的，但是注意 $I'(\theta)\neq I(p)$.

UMVUE, 7’ 显然 $T=\sum_{i\leqslant n}X_i$ 为 $p$ 的充分完备统计量 (1′)，显然它也是 $g(p)$ 的充分完备统计量，同时注意到

$$\varphi(T)=\frac{T(n-T)}{n(n-1)}$$

为 $g(p)=p(1-p)$ 的无偏估计 (2′)，根据 Lehmann-Scheffe 定理 $\varphi(T)$ 为 $g(p)$ 的 UMVUE. (1′)

**置信区间**, 5’ 先求 $p$ 的置信区间，根据 $\hat{p}$ 的渐进正态性，我们有

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}\to \mathsf{N}(0,1) \text{ in distribution.} \tag{1'}$$

由大数律 $\hat{p}\to p$ a.s., 再结合 Slutsky 引理

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\to \mathsf{N}(0,1) \text{ in distribution.} \tag{2'}$$

因此我们有

$$\mathbb{P}\Big(p\in\big[\hat{p}-\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{\alpha/2},\hat{p}+\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{\alpha/2}\big]\Big)\to\alpha,\ (n\to\infty). \tag{2'}$$

由于 $p\neq 1$，当 $n$ 足够大时这个随机区间 a.s. 落入 $g$ 的单调区域内，因此取

$$\hat{L}=\min\left\{g\Big(\hat{p}-\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{\alpha/2}\Big),g\Big(\hat{p}+\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{\alpha/2}\Big)\right\},$$
$$\hat{U}=\max\left\{g\Big(\hat{p}-\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{\alpha/2}\Big),g\Big(\hat{p}+\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{\alpha/2}\Big)\right\}.$$

则 $[\hat{L},\hat{U}]$ 即为 $g(p)$ 的渐进 $1-\alpha$ 水平置信区间.(1’)

**另解** 采用 Delta 定理，$p\neq 1/2$ 时导数不消失，因此 $g(\hat{p})$ 满足

$$\sqrt{n}(g(\hat{p})-g(p))\to \mathsf{N}(0,g'(p)^2p(1-p)) \text{ in distribution.}$$

结合 Slutsky 引理，成立如下

$$\frac{\sqrt{n}\big(g(\hat{p})-g(p)\big)}{|1-2\hat{p}|\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}))}|}\to \mathsf{N}(0,1) \text{ in distribution.} \tag{2'}$$

因此 $g(p)$ 的 $1-\alpha$ 水平置信区间为

$$\Big[g(\hat{p})-\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}|1-2\hat{p}|z_{\alpha/2}, g(\hat{p})+\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}|1-2\hat{p}|z_{\alpha/2}\Big].$$

其中 $z_{\alpha/2}$ 为 $\mathsf{N}(0,1)$ 的上侧 $\alpha/2$ 分位数。(1')

## 五、单样本问题

**充分完备性**, 8' 单样本的密度可以表示为

$$f(x|\theta)=\mathbb{1}_{x\in(\theta,\theta+1)} \tag{4'}$$

因此根据因式分解定理，$X$ 是充分统计量，注意到 $c(\theta)=h(\theta)\equiv 1$, 另外 $g(\theta,x)=\mathbb{1}_{x\in(\theta,\theta+1)}$.

完备性。假设 $\varphi(X)$ 满足

$$\mathbb{E}_\theta[\varphi(X)]=\int_\theta^{\theta+1}\varphi(x)\mathrm{d}x=0,\forall\theta\in\mathbb{R}. \tag{1'}$$

则，等式两侧对 $\theta$ 求导得到

$$\varphi(t)=\varphi(t+1),\quad \forall t\in\mathbb{R}, \tag{2'}$$

$$\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t=0. \tag{2'}$$

取 $\varphi(t)=\sin 2\pi t$, $\varphi$ 满足如上要求，但是 $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\varphi(X)=0$ 并非 a.s. 成立. (1')

**无偏估计和** UMVUE, 7' 显然 $\varphi(X)=X-1/2$ 是 $\theta$ 的无偏估计. (3')

为了证明 UMVUE 不存在，采用零无偏估计法，考虑任意一个无偏估计量 $U(X)$，满足

$$\mathbb{E}_\theta[U(X)]=\int_\theta^{\theta+1}U(x)\mathrm{d}x=0,\forall\theta\in\mathbb{R}, \tag{1'}$$

假设 $\varphi(X)$ 是 $\theta$ 的一个 UMVUE，那么

$$\mathbb{E}_\theta[\varphi(X)U(X)]=\int_\theta^{\theta+1}\varphi(x)U(x)\mathrm{d}x=0,\forall\theta\in\mathbb{R}. \tag{1'}$$

相同的推理可以得出 $\varphi(x)$ 是周期为 1 的周期函数. 根据无偏性

$$\mathbb{E}_\theta[\varphi(X)]=\int_\theta^{\theta+1}\varphi(x)\mathrm{d}x=\theta. \tag{1'}$$

由于 $\varphi(x)$ 是 1− 周期函数，上式不能对所有 $\theta$ 成立，矛盾. (1')

## 六、术语翻译

**写对不加分，写错每个扣零点五分。**

1. 总体
2. 充分统计量
3. 抽样分布 (或者样本分布)
4. 指数族
5. 相对效率 (写成效率，有效不给对。注意效率和相对效率是有明确的区别的。)
6. 相合估计量 (一致，统计量不给对)
7. 渐进正态性
8. 置信水平（置信系数不给对，置信系数为所有置信水平的下确界）
9. 似然函数 (极大似然函数不给对)
10. 平方平均误差 (或者均方误差。平均方差，均方差，损失不给对。注意 error 和 loss 是有明确的区别的。)